

# La démonstration

**La démonstration est le fondement du raisonnement logique rigoureux, et fait ainsi des mathématiques le modèle de l'accès à la vérité. Cependant, l'universalité de la vérité à laquelle mène la démonstration mathématique est remise en question : le modèle mathématique semble en fait relatif. Finalement, se pose le problème de la démonstration à l'épreuve des réalités matérielles, des vérités métaphysiques et morales.**

## **I/ La démonstration au service de la logique**

### **A/ Validité ou vérité**

#### **1/ Le but de la logique**

**La logique** est la science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique.

**Le but de la logique est d'assurer la validité d'un raisonnement.** C'est **Aristote** qui fonde la **logique formelle ou générale** au IV<sup>e</sup> siècle avant J.C. Pour lui, il s'agit d'un « **instrument de travail** » (**organon**) intellectuel ayant pour but de garantir la vérité du discours grâce à la validité de l'argumentation.

Cependant, la logique ne se préoccupe que de la validité formelle et pas de la vérité. C'est une **science de l'inférence valide et non de la vérité.**

**L'inférence** est l'opération de l'esprit par laquelle on conclut d'une idée à une autre.

#### **2/ Des risques inévitables**

Cela entraîne des risques inévitables, notamment celui de **donner à des propos faux une apparence de science ou de vérité.** C'est une technique qui peut être utilisée notamment par les démagogues.

On en trouve un **exemple dans la pièce *Dom Juan*, de Molière.** Le personnage éponyme s'adresse à son valet : « l'hypocrisie est un vice à la mode, et tous les vices à la mode passent pour vertus ». Il en tire une conclusion : l'hypocrisie est une vertu.

Même si le raisonnement est valide du point de la logique, il est faux car il s'appuie sur des prétendues « vérités » qui n'en sont pas. En conséquence, **Dom Juan donne à son propos un aspect de vérité alors qu'il s'agit d'une absurdité.**

Ce raisonnement faux constitue un bon exemple du **pouvoir de l'argumentation.** Le valet Sganarelle, qui ne sait que répondre, illustre la réaction humaine face à **une illusion qui semble mathématiquement correcte.**

### **B/ Le syllogisme**

#### **1/ Le modèle du raisonnement**

## **Aristote a défini le syllogisme comme le modèle du raisonnement démonstratif.**

**Le syllogisme** est un raisonnement formel qui établit une conclusion nécessaire déduite à partir des prémisses.

**Une prémisses** est une proposition, considérée comme évidente par elle-même ou démontrée dans un autre raisonnement, sur laquelle on base un raisonnement et une conclusion.

Un syllogisme se fait en **trois étapes** : une prémisses majeure, une prémisses mineure, et une conclusion qui se déduit des deux prémisses. Pour qu'il soit valide, il faut :

- **Un terme moyen** qui est sujet de la prémisses majeure et objet de la prémisses mineure (hommes).
- **Un terme majeur** qui est objet de la prémisses majeure et objet de la conclusion (mortels).
- **Un terme mineur** qui est sujet de la prémisses mineure et sujet de la conclusion (Socrate).

La phrase suivante est un syllogisme classique : tous les hommes sont mortels (prémisses majeure) ; or Socrate est un homme (prémisses mineure) ; donc Socrate est mortel (conclusion).

## **2/ Le détournement du syllogisme**

Le syllogisme peut être détourné pour constituer des faux raisonnements, **les sophismes et les paralogismes**. Ce sont des raisonnements qui ont l'apparence de la validité mais qui ne sont en fait pas valides logiquement. Les prémisses sont vraies, mais la conclusion ne l'est pas.

**Un sophisme** est un raisonnement qui, partant de prémisses vraies et obéissant aux règles de la logique, aboutit à une conclusion inadmissible.

**Un paralogisme** est un raisonnement faux qui apparaît comme rigoureux.

Contrairement au sophisme, dans lequel le locuteur a une volonté de tromper, dans le paralogisme le locuteur est de bonne foi.

Le terme « sophisme » est issu des **sophistes** qui, dans la Grèce antique, enseignaient l'éloquence et l'art de la persuasion (généralement sans souci de la vérité). C'est précisément pour démasquer leur rhétorique parfois fallacieuse que les philosophes comme Aristote et Platon ont posé les bases de la logique.

Par exemple, on trouve dans la pièce **Rhinocéros de Ionesco** un sophisme célèbre. Le logicien dit en effet au vieux monsieur : « **tous les chats sont mortels. Socrate est mortel. Donc Socrate est un chat** ». On peut voir que le raisonnement n'est pas valide (il ne s'agit pas d'un syllogisme), car le terme moyen et le terme majeur ne sont pas à leurs places habituelles.

Cet exemple de raisonnement est très différent de celui présent dans *Dom Juan*. Le premier était valide logiquement mais s'appuyait sur des prémisses fausses. Dans le syllogisme de *Rhinocéros*, les prémisses sont vraies mais le raisonnement n'est pas valide logiquement. Dans les deux cas, la conclusion est fausse. **On retrouve ici les**

**deux types principaux de faux raisonnements, qui sont prononcés afin de tromper l'auditoire en donnant un aspect de vérité à des conclusions fausses.**

## **C/ Les mathématiques, un accès universel à la vérité**

### **1/ Un modèle universel**

Les mathématiques sont apparues en Grèce antique chez les Pythagoriciens (VI<sup>e</sup> siècle avant J.C.). Depuis, elles font figure de **modèle d'accès à la vérité**, car elles instaurent un ordre et une mesure : elles introduisent du rationnel dans l'intuitif et de l'intelligible dans le sensible. **Platon, Descartes, Spinoza et Leibniz en font l'idéal de la science, le chemin privilégié vers la vérité et la philosophie.**

**Descartes** a ainsi l'idée de faire une « **mathématique universelle** » : le raisonnement logique est applicable quels que soient les objets de connaissance, et il permet donc à l'esprit d'accéder à toutes les vérités. **Le modèle mathématique ne se cantonne plus aux connaissances mathématiques : il devient un modèle universel.**

« Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. »

*Antidosis*, Isocrate, Ve - VI<sup>e</sup> siècle avant J.C.

### **2/ L'accès à l'Être**

**Pour les philosophes platoniciens, les mathématiques conduisent à l'Être, c'est-à-dire à l'essence des choses.** En effet, dans le monde sensible, règne la *doxa* (l'opinion). Le monde de la *doxa* ne permet pas l'accès à la vérité, car il est instable, changeant.

Grâce à la rigueur de la démonstration logique, les mathématiques arrachent à ce monde de la *doxa*. Elles nous mènent à l'absolu, l'immuable, l'essence des choses.

Sur le portail de l'Académie, école de **Platon**, il était gravé « **Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre** ». Pour ce philosophe, les mathématiques étaient un intermédiaire pour accéder au royaume des Idées.

## **II/ La relativité du modèle mathématique**

### **A/ Une faille dans la logique mathématique**

#### **1/ Une part d'intuition**

**Les mathématiques ne seraient pas si rigoureuses qu'on le dit, à cause de leur part d'intuition.** Descartes, comme beaucoup d'autres rationalistes, considère que l'arithmétique et la géométrie sont bien plus certaines que les sciences qui s'appuient sur des expériences et non des démonstrations. Cependant, à l'origine d'un modèle mathématique, on trouve toujours **des axiomes, qui sont des prémisses non démontrées.**

**Un axiome** (du grec ancien *axioma*, « considéré comme digne, convenable, évident en soi ») désigne une vérité indémontrable qui doit être admise.

Pour **Descartes**, ces propositions premières indémontrables sont immédiatement connues par l'esprit : leur vérité se voit d'elle-même. **Ce sont donc des évidences, des « intuitions »**.

« Les premiers principes ne peuvent être connus que par intuition ; et au contraire les conséquences éloignées ne peuvent l'être que par déduction. »

*Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes, 1628

## 2/ L'introduction de la relativité

**La notion d'évidence est cependant remise en cause rapidement, et on introduit la relativité.**

Il semble qu'on ne puisse pas dire d'une proposition mathématique qu'elle est **absolument** « vraie » ou « fausse » car, à l'origine du raisonnement, se trouvaient toujours des axiomes posés intuitivement. En conséquence, on dira que la proposition est « vraie » ou « fausse » **relativement à un ensemble d'axiomes donnés**. C'est une des grandes limites de la démonstration mathématique.

Le poète Pierre Reverdy dit ainsi que « l'évidence paralyse la démonstration ». Cela signifie qu'à force de constater certaines propositions comme évidentes (et donc ne nécessitant pas de démonstration), on aboutit à des démonstrations qui en seront toujours relatives.

« L'évidence paralyse la démonstration. »

*Le Gant de crin*, Pierre Reverdy, 1927

## B/ De nouveaux modèles géométriques

**Au XIXe siècle, se développent des géométries non euclidiennes, comme celles de Lobatchewski ou de Riemann.**

Le système euclidien avait pour postulat « par un point extérieur à une droite on peut faire passer une unique parallèle à cette droite ». Riemann et Lobatchewski partent de postulats inverses :

- Selon la **géométrie de Riemann**, par un point extérieur à une droite on ne peut faire passer aucune parallèle à cette droite.
- Selon la **géométrie de Lobatchewski**, par un point extérieur à une droite on peut faire passer une infinité de parallèles à cette droite.

A partir de ces postulats, on peut enchaîner de façon rigoureuse la démonstration de théorèmes et mettre en place un système géométrique valide. **On voit donc bien qu'un système déductif ne tient qu'à sa forme, indépendamment de l'évidence intuitive de ses propositions premières.**

## C/ L'axiomatique

Puisque l'on peut construire des géométries formellement valides en partant de bases non euclidiennes, cela signifie que **les points de départ posés par Euclide n'étaient pas des vérités évidentes en elles-mêmes**. Au lieu de parler d'« axiomes », on parlera

plutôt de « **postulats** ». On ne se prononce pas sur leur vérité, mais on leur demande seulement de permettre la déduction de propositions non contradictoires.

**Un postulat** est une proposition qu'on demande d'admettre, sans se prononcer sur sa vérité.

**Dans les mathématiques contemporaines, on cherche ainsi à créer des axiomatiques**, qui sont des systèmes déductifs entièrement formalisés à propos desquels on ne pose pas le problème de la vérité ni même du sens des propositions qui le constituent. D'ailleurs, selon le philosophe et logicien **Robert Blanché**, il faudrait plutôt parler de « **postulatiques** ».

### **III/ La démonstration à l'épreuve de la réalité**

#### **A/ La science expérimentale**

Au XVIIe et surtout au XVIIIe siècle, on observe **l'essor de la science expérimentale**. Elle objecte que la démonstration n'est pas une voie d'accès universelle à la vérité, car elle est trop théorique. **Dans les sciences de la nature, on ne peut pas appliquer la démonstration : le critère de vérité est l'expérience.**

Par exemple, **Diderot** se moque d'une physique qui raisonnait trop par théorie et insuffisamment par expérience, et qui démontrait ainsi sans appel que la lumière ne se décomposait pas. Pourtant Newton observa ensuite, grâce au prisme, la décomposition de la lumière.

« L'accord avec l'expérience est pour une théorie physique l'unique criterium de vérité. »

*La Théorie physique, son objet et sa structure*, Pierre Duhem, 1914

#### **B/ La démonstration des vérités métaphysiques**

##### **1/ Le rationalisme**

**Pour des rationalistes classiques comme Descartes ou Spinoza, la démonstration peut s'appliquer au domaine de la métaphysique.**

**La métaphysique** (étymologiquement « au-delà de la physique ») est la « science » des questions relatives à des entités non physiques : Dieu, l'âme, l'origine du monde, la destinée de l'homme, etc.

Par exemple, on peut démontrer l'existence de Dieu ou l'immatérialité de l'âme. Descartes propose ce que l'on appelle la preuve ontologique de l'existence de Dieu. Elle se résume par : Dieu possède toutes les perfections, or l'existence est une perfection, donc Dieu existe. **Même si cette démonstration a été maintes fois contestée, elle illustre parfaitement l'idée que certains philosophes entendent tout démontrer, même les vérités métaphysiques.**

##### **2/ Le positivisme logique**

**A partir du XIXe siècle, s'impose le positivisme logique.** Pour ce courant de pensée, seul l'énoncé scientifique a un sens car on peut le vérifier dans l'expérience. Il est donc possible de **rendre le monde entier intelligible grâce à la rigueur de la logique.**

**Le Cercle de Vienne**, fondé en 1929 par le philosophe et physicien Ernst Mach, regroupe plusieurs disciplines : philosophie, mathématique, physique et économie. Il cherche à clarifier des problèmes et des discours, uniquement par l'analyse logique et scientifique. Il n'y aurait pas de réalité en-dehors de la réalité matérielle, pas de monde métaphysique. **Le but final du Cercle de Vienne est d'unifier la science.**

### **3/ La démonstration dépassée par la métaphysique**

**Cependant, le positivisme logique n'est pas universellement admis : il est évident que la science ne peut pas tout démontrer.**

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, **Hume** et **Kant** établissent déjà l'impossibilité de prouver l'existence d'entités métaphysiques, car l'esprit humain ne peut rien connaître en-dehors de l'expérience. C'est une **pure illusion** que de vouloir transformer toutes les idées de la raison en objets d'une connaissance démonstrative.

**D'ailleurs, Kant réfute la démonstration cartésienne de l'existence de Dieu.**

Descartes prétend prouver que Dieu existe à partir de ce qu'on pense qu'il est. En effet, il lui attribue une essence qui est la perfection. Cependant, en définissant Dieu comme étant parfait, Descartes crée un concept qui n'était pas préétabli. C'est donc une démonstration non valide.

« Combien il est contraire au dessein de Dieu que la vérité de sa religion soit aussi évidente et claire pour tous les hommes qu'une démonstration mathématique. »

*Écrits sur la religion*, Newton, début du XVIII<sup>e</sup> siècle

### **C/ La démonstration dans le domaine de la morale**

#### **1/ Le savoir et la morale**

**Comme pour la métaphysique, il semble impossible d'utiliser la démonstration dans le domaine de la morale.** La science peut rendre intelligible le réel (ce qui est) mais ne pourra jamais dire ce qui doit être. **Aucun postulat moral ne peut être déduit du savoir scientifique.**

C'est en particulier une idée de **Kant**. Il montre qu'il faut bien distinguer le savoir (qui porte sur le Vrai) de la morale (qui porte sur le Bien). Ainsi, il différencie la **raison pure** relative aux connaissances et la **raison pratique** relative à la morale. La démonstration appartient au domaine de la raison pure, c'est-à-dire au Vrai, et ne peut pas répondre à la question « Que dois-je faire ? ».

#### **2/ L'argumentation comme accès à la vérité**

Pourtant, cela ne signifie pas qu'on ne peut pas argumenter ou justifier une décision politique ou morale. Par exemple, dans un débat sur le droit à l'interruption volontaire de grossesse, on ne pourra pas démontrer formellement qu'une position est « vraie » ou « fausse » mais on pourra donner des arguments dans un sens comme dans l'autre.

**L'impossibilité de démontrer, dans le domaine de la morale, n'est pas l'impossibilité de discuter ou de trancher.**

Il en ressort qu'il existe un **autre accès à la vérité que la démonstration**, et qu'il faut le privilégier pour ce qui est de la morale ou de la politique : c'est l'**argumentation**, qui nécessite un dialogue avec autrui. On aboutit ainsi à une **vérité consensuelle plutôt que rigoureuse**.